Groupe A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 h.)

La partie IV *est indépendante des parties* II *et* III

Dans tout le problème, on dira qu'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ si elle est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle fermé borné et si les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{0} |f(t)|\,dt$ et $\int_{0}^{\infty} |f(t)|\,dt$ sont convergentes.

I

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on pose

$$\mathrm{M}_f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt$$

et on note $\mathrm{M}_f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ l'application ainsi définie.

1° Montrer que, si f est bornée, M_f est bornée. Calculer M_f dans les quatre cas suivants :

a. $f(x) = x$

b. $f(x) = |x|$

c. $f(x) = \cos^2 x$

d. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

2° On suppose f positive. Montrer que :

— ou bien $\mathrm{M}_f(x) = 0$ quel que soit x;

— ou bien il existe trois nombres réels a, b, c, avec $b > 0$ et $c > 0$, tels que $\mathrm{M}_f(x) > \dfrac{c}{|x-a|+b}$ quel que soit x.

En déduire dans ce deuxième cas que M_f n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}$.

3° Montrer que M_f est continue dans les deux cas suivants :

f est continue et bornée;

f est continue et $|f|$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

II

Soit f une fonction positive intégrable sur $\mathbf{R}$. Pour tout $r > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$ on pose :

$$u_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{r}{(x-t)^2 + r^2}\, dt,$$

(cette notation sera justifiée au 2°); on se propose de comparer u_r à la fonction M_f définie au paragraphe I.

Pour toute fonction numérique ψ de la variable réelle et tout $r > 0$, on pose $\psi_r(x) = \frac{1}{r}\,\psi\left(\frac{x}{r}\right)$, et (lorsque l'intégration est justifiée) :

$$f * \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,\psi(t)\,dt.$$

1° Pour tout $\alpha > 0$, on pose $\varkappa_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha \end{cases}$, et on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonctions $(\varkappa_\alpha)_{\alpha>0}$. Montrer que si $\psi \in \mathcal{E}$, l'intégrale $f * \psi_r(x)$ est convergente pour tout $r > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$, et que l'on a :

$$\sup_{r>0} f * \psi_r(x) \leqslant \mathrm{M}_f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt.$$

2° Soit $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $r > 0$ l'intégrale $f * \varphi_r(x)$ est convergente.

b. Montrer que φ est limite uniforme d'une suite croissante de fonctions de $\mathcal{E}$.

c. En déduire que l'on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\sup_{r>0} f * \varphi_r(x) \leqslant \mathrm{M}_f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt.$$

3° Trouver deux constantes C et C′ telles que l'on ait pour tout x :

$$\mathrm{C}\,\mathrm{M}_f(x) \leqslant \sup_{r>0} u_r(x) \leqslant \mathrm{C}'\,\mathrm{M}_f(x).$$

III

On conserve les notations et hypothèses du II, et l'on pose $\mathrm{P} = \{z = x + ir \in \mathbf{C} \mid r > 0\}$, et pour tout $z \in \mathrm{P}$, $\mathrm{A}(z) = \dfrac{i}{\pi z}$.

Soit U (x, r) et V (x, r) respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de A $(x + ir)$.

1° *a.* Comparer en tout point de $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$ les dérivées partielles des fonctions U et V.

b. On pose $V_r(x) = V(x, r)$. Montrer que l'intégrale $v_r(x) = f * V_r(x)$ est convergente.

c. Lorsque f est nulle en dehors d'un intervalle borné de $\mathbf{R}$, montrer que les fonctions

$$u(x, r) = u_r(x)$$
$$v(x, r) = v_r(x)$$

ont dans $\mathbf{R} \times]0, \infty[$ des dérivées partielles secondes qui vérifient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0.$$

2° On suppose en outre f uniformément continue.

a. Soit $(x_n + ir_n)_{n>0}$ une suite de points de P convergeant dans $\mathbf{C}$ vers un nombre réel x.

Montrer que $\lim_{n \to \infty} u_{r_n}(x_n) = f(x)$.

Montrer que la suite de fonctions u_{r_n} converge, uniformément sur $\mathbf{R}$, vers f. [On pourra commencer par démontrer que f est bornée]

b. Montrer que :

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} v_r(x) = \lim_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-r} \frac{f(x-t)}{t}\, dt + \int_{r}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t}\, dt \right]$$

chaque fois que l'une de ces limites existe.

c. Montrer que les limites définies au *b.* existent si f est continûment dérivable.

IV

Si $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert borné de $\mathbf{R}$, on notera $l(I) = b - a$ sa longueur et I^* l'intervalle ouvert de même milieu que I et tel que $l(I^*) = 5\, l(I)$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$. Si U contient un intervalle ouvert non borné on pose $l(U) = +\infty$. Sinon, U est réunion d'une famille $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'intervalles ouverts bornés deux à deux disjoints (éventuellement vides à partir d'un certain rang) et on note $l(U)$ la somme éventuellement infinie de la série $\sum_{n=0}^{\infty} l(I_n)$.

Une partie A de $\mathbf{R}$ qui, pour tout $\varepsilon > 0$, est contenue dans un ouvert U_ε tel que $l(U_\varepsilon) < \varepsilon$ est dite négligeable.

On se propose de montrer que si f est positive et intégrable sur $\mathbf{R}$, l'ensemble des points x où $M_f(x) = +\infty$ est négligeable.

1° Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'intervalles ouverts bornés de $\mathbf{R}$; on pose $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, $r_\lambda = l(I_\lambda)$, et on suppose que $r = \sup_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda$ est fini.

a. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $r_{\lambda_0} > r/2$; montrer que, si pour tout $\lambda \in \Lambda$ $I_\lambda \cap I_{\lambda_0}$ est non vide, alors $E \subset I^*_{\lambda_0}$.

b. On considère une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \Lambda$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$r_{\lambda_0} > r/2;$$

$$\text{si } L_n = \{\lambda \in \Lambda \mid I_\lambda \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} I_{\lambda_i} \right) = \varnothing\} \quad (n > 0),$$

on a $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ si L_n est vide et sinon $\lambda_{n+1} \in L_n$ et $r_{\lambda_{n+1}} > \frac{1}{2} \sup_{\lambda \in L_n} r_\lambda$.

Soit F la famille d'intervalles deux à deux disjoints $\{I_{\lambda_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que l'on a $E \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I^*_{\lambda_n}$ dans les deux cas suivants :

α. F est une famille finie,

β. $\lim_{n \to \infty} r_{\lambda_n} = 0$.

2° Soit f une fonction positive intégrable sur $\mathbf{R}$. Pour tout $s > 0$, on pose $E_s = \{x \in \mathbf{R} \mid M_f(x) > s\}$. Montrer qu'il existe un ouvert B_s de $\mathbf{R}$ contenant E_s et vérifiant :

$$l(B_s) \leqslant \frac{5}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Conclure.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail